

Projekt z Programowania i optymalizacji-Model COVID-19

Michał Krzus, Kinga Banasiak, Joanna Łucka

May 2020

1 COVID-19

W grudniu 2019 r. w Wuhan w prowincji Hubei w Chinach doszło do wybuchu klastrów wirusowego zapalenia płuc wywołanego nowym koronaawirusem (2019-nCoV/SARS-CoV-2). Od czasu wybuchu epidemii kilka grup zgłosiło szacunkowe wartości. Do oszacowania tendencji epidemicznych w Wuhan zastosowano model dynamiki chorób zakaźnych SEIR (Susceptible, Exposed, Infectious, and Removed). Kilka etapów zostało podzielonych przez daty, w których w Wuhan obowiązywały różne poziomy środków zapobiegawczych i kontrolnych. Szacowana liczba zakażeń osiągnie najwyższy poziom pod koniec lutego, czyli 58077 – 84520 lub 55869 – 81393. To, czy szczyt liczby zakażeń nastąpi w lutym 2020 r., czy też nie, może być ważnym wskaźnikiem oceny adekwatności obecnych środków podejmowanych w Chinach. Niezależnie od wystąpienia szczytu, obecnie rygorystyczne środki w Wuhan powinny być stale wdrażane, a w innych miejscach w Chinach, gdzie występuje duża liczba przypadków COVID-19, należy zastosować niezbędne, rygorystyczne środki w zakresie zdrowia publicznego w celu zmniejszenia R_t do idealnego poziomu i kontroli zakażenia. Koronaawirus (2019-nCoV/SARS-CoV-2) doprowadził do wybuchu wirusowego zapalenia płuc w Wuhan w Chinach od grudnia 2019 r. Światowa Organizacja Zdrowia (WHO) ogłosiła chorobę Coronavirus Disease 2019 (COVID-19)³. Większość przypadków z pierwotnego klastra miała związek epidemiologiczny z Targiem Hurtowym Huanan Seafood⁴. Pacjenci mają objawy kliniczne, w tym gorączkę, kaszel, duszność, bóle mięśni, zamieszanie, ból głowy, ból gardła, katar, ból w klatce piersiowej, biegunkę, nudności i wymioty. Na dzień 17 lutego 2020 r. w Chinach kontynentalnych Narodowa Komisja Zdrowia Chińskiej Republiki Ludowej (NHC) zgłosiła łącznie 72436 potwierdzonych przypadków (w tym 11741 obecnie poważnych przypadków), 6242 obecnie podejrzane przypadki, łączną liczbę 1868 zgonów i 12 552 przypadki wypisane ze szpitala⁷. Znaczący wzrost liczby potwierdzonych przypadków w Chinach i za granicą doprowadził do ogłoszenia przez WHO w dniu 30 stycznia, że zdarzenie to stanowiło już zagrożenie dla zdrowia publicznego o zasięgu międzynarodowym. W odpowiedzi na wybuch epidemii COVID-19 podjęto szereg natychmiastowych działań w zakresie zdrowia publicznego.

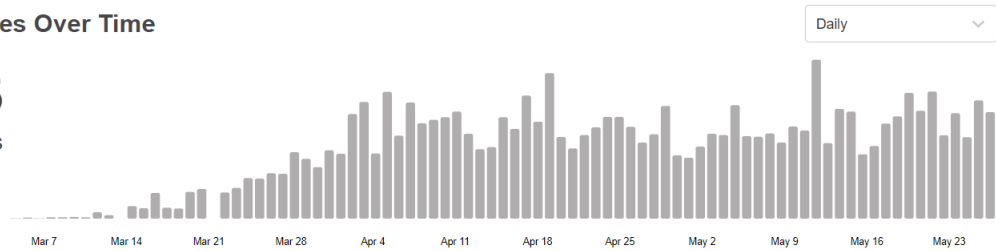
Obecnie w Polsce jest ponad 22000 zachorowań oraz ponad 1000 przypadków śmiertelnych. Aktualne dane pochodzące ze strony World Health Organization [WHO](#).

Confirmed Cases Over Time

22,473

confirmed cases

Source: World Health Organization

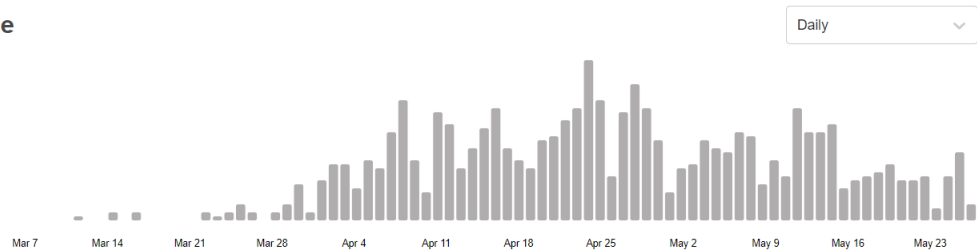


Deaths Over Time

1,028

deaths

Source: World Health Organization



Rysunek 1.1: Aktualne dane dla Polski z dnia 28/05/2020

2 Wstęp

Optymalna kontrola może pomóc w określeniu polityki szczepień w odniesieniu do chorób zakaźnych w tym przypadku do wirusa SARS-COV-2. W przypadku chorób przenoszonych poziomowo, tzn takich, w których możemy podzielić populację na pewne przedziały, zastosowano modele SIR oraz ich pochodne. Większość literatury na temat modeli SEIR z funkcjonalami kosztu są to wskaźniki szczepień, mogą występować w formie kwadratowej bądź liniowej, jest to uzależnione od zmiennej $u(r)$. W tym miejscu proponujemy wprowadzenie do systemu koszt typu L^1 , który jest liniowy w stosunku do zmiennej sterującej. Odpowiednio L^2 symbolizuje formę kwadratową, która symbolizuje koszt kwarantanny lub odizolowania zdrowych osobników od chorych. Zakładamy, że liczba szczepień za każdym razem jest ograniczona. Wówczas odrzucamy utopijną wersję zdarzeń, że każdy obywatel zostanie zaszczepiony. W ten sposób powstaje optymalny problem kontroli z mieszanym ograniczeniem stanu kontroli. Omawiamy niezbędne warunki optymalności zasady maksymalnej oraz przedstawiamy rozwiązania liczbowe, które dokładnie spełniają niezbędne warunki.

3 Model SEIR

Jest to pochodna modelu SIR, z tą różnicą, że uwzględniamy fazę utajoną choroby za pomocą dodatkowej grupy osobników $E(t)$ pomiędzy grupą $S(t)$ a $I(t)$. Modele SEIR są szeroko stosowane do modelowania rozprzestrzeniania się chorób zakaźnych w danej populacji. Modele te dzielą jednostki na cztery przedziały istotne dla epidemii. Osobnik może znajdować się w enklawie S, jeżeli jest podatny (lub podatny) na chorobę. Osoby zakażone, ale nie będące w stanie przenieść go, znajdują się w przedziale E, czyli w populacji narażonej na zakażenie. Zakażone osoby zdolne do rozprzestrzeniania się choroby znajdują się w enklawie I, a osoby uodpornione w enklawie R. W modelach SEIR zakłada się, że każdy jest podatny na chorobę przez urodzenie, a choroba przenoszona jest na jednostkę przez poziomą zapadalność, tzn. podatny osobnik staje się zakażony w kontakcie z osobami zakaźnymi. Obecność opóźnień prowadzi do powstania lepszych prognoz oraz do powstawania oscylacji.

Model SEIR jest więc modelem dynamicznym, który rozdziela pewną populację na poszczególne przedziały.

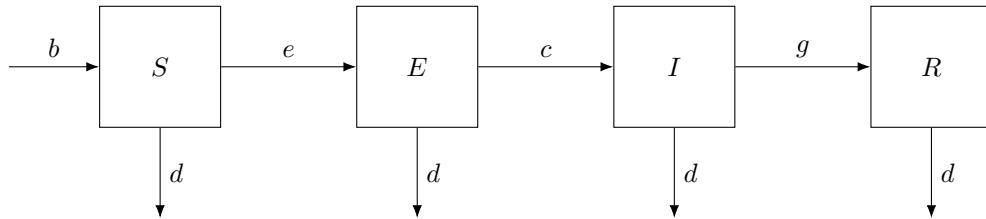
Opisując ten model przypisując zmienne do każdej klasy otrzymujemy:

- (S – the susceptibles) $S(t)$ to liczba osób w czasie t , które mogą zostać zainfekowane,
- (E – exposed) $E(t)$ to liczba osób w czasie t , które doświadczają długiego okresu inkubacji, tak że dana osoba jest zarażona, ale jeszcze nie zaraża innych.
- (I – the infectives) $I(t)$ to liczba osób w czasie t , które są zarażone i mogą przenosić chorobę,
- (R – the removed, or dead/recovery) $R(t)$ to liczba osób, które w czasie t są uodpornione (wyzdrowiały lub zmarły).

Ważnym założeniem jest, że w modelach SEIR osoby w stanie wyleczonym zyskują całkowitą odporność na patogen.

Przenoszenie choroby w danej populacji opisuje się za pomocą następujących parametrów:

- e – stopień, w jakim narażone osoby stają się zakaźne,
- g – stopień, w jakim osoby zakaźne wracają do zdrowia,
- c – współczynnik umieralności z powodu choroby,
- b – naturalny współczynnik urodzeń,
- d – naturalny współczynnik umieralności,
- c – współczynnik rozprzestrzeniania się czynnika zakaźnego z jednej osoby na drugą.
- $u(t)$ – jest to frakcja osobników wrażliwych zaszczepionych w czasie t (W tym przypadku zakładamy, że szczepionka jest skuteczna, tak aby wszystkie zaszczepione osoby wrażliwe stały się odporne).



Powyższy schemat SEIR pokazuje, w jaki sposób poszczególne osoby poruszają się w każdej komórce modelu. Na przykład, koronawirusy są chorobami o krótkim czasie inkubacji, w przypadku których powrót do zdrowia daje jedynie czasową odporność. Najnowsze dane pokazują jednak również, że z Covid-19 wyzdrowiały tysiące ludzi. Chociaż wskaźnik wyzdrowienia jest obiecujący, nie oznacza to, że ci, którzy zostali zakażeni koronawirusem, nie są nadal zagrożeni, ponieważ eksperci uważają, że posiadanie wirusa raz nie oznacza, że nie można zachorować od niego ponownie, więc wyzdrowienie daje jedynie tymczasową odporność, dlatego też chociażby prostszy model SIR nie jest dobrym modelem do prognozowania epidemii COVID-19, ale model SIER może z pewną dokładnością przybliżyć rozkład chorych w czasie. W zamkniętej populacji możemy zatem wyodrębnić model, z istotną dynamiką, to znaczy uwzględniając współczynnik urodzeń oraz zgonów przed epidemią.

$$S'(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t) \quad (3.1)$$

$$E'(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t) \quad (3.2)$$

$$I'(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t) \quad (3.3)$$

$$R'(t) = gI(t) - dR(t) + u(t)S(t) \quad (3.4)$$

$$N'(t) = (b - d)N(t) - aI(t) \quad (3.5)$$

Z warunkami początkowymi:

$$S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, N(0) = N_0. \quad (3.6)$$

Gdzie rozmiar populacji jest stały i wynosi: $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$, dla dowolnego t . Aby śledzić liczbę zaszczepionych osób wprowadzamy dodatkową zmienną $W(t)$, która spełnia równanie:

$$\begin{aligned} W'(t) &= u(t)S(t), \\ W(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

W limicie ilościowym szczepionek $W(t) \leq V_0$, który musimy uwzględnić, ponieważ zakładamy, że nie jesteśmy na tyle bogaci aby zaszczepić każdego obywatela, rozpatrując dane w czasie $t \in [0, T]$, mamy:

$$u(t)S(t) \leq V_0,$$

gdzie V_0 jest górną granicą dla szczepionek dostępnych w każdej chwili t .

Rozważamy funkcję kosztu L^1 , która jest liniowa w stosunku do zmiennej sterującej $u(t)$. Ponieważ zmienna sterująca pojawia się również liniowo w dynamice i ograniczeniach, (powiększona) funkcja hamiltonowska jest liniowa w stosunku do zmiennej sterującej. Ocena niezbędnego warunku optymalności zasady maksymalnej Pontryagina pokazuje, że każda optymalna kontrola musi być połączeniem Regulatoru dwustanowego i kontroli pojedyncza. W tym przypadku termin "Regulator dwustawny" lub "Kontrola pojedyncza" odnosi się do samego ograniczenia mieszanego, co zostanie wyjaśnione w części 5. W tej pracy będziemy używać jedynie Regulatoru dwustawnego. Definicję można znaleźć [tutaj](#).

4 Problem optymalnego sterowania z ograniczeniami mieszanymi

Rozważmy następujący optymalny problem kontroli z mieszanym stanem kontroli za pomocą funkcjonału kosztu. Chcemy zmniejszyć szybkość wzrostu tych, którzy są podatni na chorobę wówczas koszty szczepień lub alternatywnie koszty izolacji (czyli również koszty, ale ekonomiczne) będą odpowiednio mniejsze. Z jednej strony chcemy aby było stosunkowo mało chorych, wówczas nie wydamy za dużo za szczepiania lub koszty kwarantanny/izolacji osób chorych.

$$P(1) = \begin{cases} \min J_1 = \int_0^T (AI(t) + Bu(t))dt \\ \text{pod warunkiem} \\ S'(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ E'(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \\ I'(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \\ N'(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \\ u(t)S(t) \leq V_0, \\ u(t) \in [0, 1] \text{ dla } t \in [0, t], \\ S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, N(0) = N_0. \end{cases}$$

Usunęliśmy z modelu:

$$R'(t) = gI(t) - dR(t) + u(t)S(t)$$

ponieważ liczba odzyskanych osobników jest podana przez:

$$R(t) = N(t) - S(t) + E(t) + I(t)$$

oraz:

$$W'(t) = u(t)S(t)$$

które jest zbędne dla problemu kontroli. Zatem zmianą stanu jest:

$$X(S, E, I, N) \in \mathbb{R}^4$$

Obserwujemy teraz nasz koszt L^1 :

$$J_1 = \int_0^T (AI(t) + Bu(t))dt \quad (4.1)$$

W przeciwieństwie do kontroli kosztu, w której u jest funkcją skalarną, a to pozwala na łatwiejsze obliczenia:

$$J_2 = \int_0^T (A_2I(t) + B_2u^2(t))dt \quad (4.2)$$

Dla tego przypadku A, B, A_1, B_1 brane są pod uwagę jako stałe. Wypukłość $J_2(u)$ w stosunku do u jest korzystne dla podejścia numerycznego, ponieważ pozwala na wyrażenie zmiennej sterującej przez zmienną stanu i zmienną sąsiednią. W obu przypadkach koszt funkcjonału jest sumą ważoną ogólnego kosztu opieki nad zakażonymi osobami i kosztu szczepienia. Należy jednak zauważyć, że w przypadku $J_2(x, u)$ koszt szczepienia będzie zależał od u^2 , w mniejszej ilości w porównaniu tego z u , która przyjmuje wartości mniejsze niż 1. Pod tym względem $J_1(x, u)$ jest bardziej realistycznym kosztem funkcjonału. W celu uproszczenia analizy niezbędnych warunków optymalnego problemu sterowania (P_1), wygodnie jest przepisać go w formie ogólnego optymalnego problemu sterowania zmieszonym ograniczeniem sterowania

$$(P_{mixed}) = \begin{cases} \min J_1 = \int_0^T L(x(t), u(t))dt \\ \text{pod warunkiem} \\ x'(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ m(x(t), u(t)) \leq 0, \\ u(t) \in [0, 1], \\ x(0) = x_0, \\ x(T) \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x &= (S, E, I, N), \\ L(x, u) &= AI + Bu = L_1(x) + L_2(x), \\ f(x) &= f_1(x) + A_1(x), \\ f_1(x) &= c(-SI, 0, 0, 0)^T, \\ g(x) &= (-S, 0, 0, 0)^T, \\ m(x, u) &= uS - V_0, \end{aligned}$$

i

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(e+d) & 0 & 0 \\ 0 & e & -(g+a+d) & 0 \\ 0 & 0 & -a & b-d \end{bmatrix}.$$

Warunek początkowy x_0 i parametry określimy w rozdziale z obliczeniami. Równanie różniczkowe

$$x'(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

jest afiniczne w kontroli i jest nieliniowe w stanie x ze względu na określone $f_1(x)$. Należy zauważyć, że mieszane ograniczenia stanu kontroli spełnia warunek regularności standardowej.

$$m_x(x(t), u(t)) = S(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T] u(t)S(t) = V_0 \quad (4.3)$$

Można pokazać w prosty sposób istnienie rozwiązania (x_*, u_*) dzięki problemowi P_{mixed}

5 Warunki optymalizacji niezbędne dla (P_1)

Niech (x_*, u_*) będzie minimalizować nasz problem P_1 lub (P_{mixed}) . Poniżej sprawdzimy niezbędny warunek optymalności zasady maksimum Pontryagina. Dlatego też maksymalizujemy $-J_1(x, u)$, standardową funkcję Hamiltona daną przez:

$$H(x, p, u) = -\lambda L(x, u) + \langle p, f(x) + g(x)u \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

gdzie $p = (p_S, p_E, p_I, p_N) \in \mathbb{R}^4$ jest naszą zmienną pomocniczą. W rozszerzonym hamiltonianie ograniczenie $m(x, u) \geq 0$ jest połączone poprzez mnożnik $q \in R$ do hamiltonianu:

$$\mathcal{H}(x, p, q, u) = H(x, p, u) - qm(x, u). \quad (5.2)$$

Znak minus we wzorze wynika z faktu, że zasada maksimum zakłada, iż ograniczenie stanu kontrolnego **3** zapisanego w formie $-m(x, u) \geq 0$. Ze względu na warunek regularności (4.3), Zakładamy istnienie skalaru $\lambda \geq 0$, absolutnie ciągłej funkcji $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$, oraz całkwalnej funkcji $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że następujące warunki są spełnione prawie wszędzie:

- (i) $\max |p(t)| : t \in [0, T] + \lambda > 0$,
- (ii) (równanie adsorpcyjne i warunek poprzeczności)

$$\begin{aligned} -p(t) = \mathcal{H}_x[t] &= -\lambda L_x[t] + \langle p(t), f_x[t] + g_x[t]u_*(t) \rangle - \langle q(t), m_x[t] \rangle, \\ -p(T) &= (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

- (iii) (warunek maksimum dla hamiltoninu H)

$$H(x_*(t), p_*(t), u_*(t)) = \max_u \{H(x_*(t), p(t), u) | 0 \leq u \leq 1, m(x_*(t), u) \geq 0\},$$

- (iv) (warunek maksimum lokalnego dla \mathcal{H})

$$\mu(t) = \mathcal{H}_u[t] = -L_u[t] + \langle p(t), g[t] \rangle - q(t)m_u[t] \in N_{[0,1]}(u_*(t)),$$

- (v) (warunek komplementarności)

$$q(t)m((x_*(t), u_*(t))) = q(t)(u_*(t)S_*(t) - V_0) = 0, \quad q(t) \geq 0.$$

W przypadku warunku (iv), $N_{[0,1]}(u_*(t))$ oznacza stożek normalny z analizy wypukłości do $[0, 1]$ przy optymalnym sterowaniu $u_*(t)$ redukującym się do $\{0\}$ dla $u_*(t) \in [0, 1]$. Ponieważ stan końcowy $x(T)$ jest wolny, łatwo jest udowodnić, że powyższe niezbędne warunki przystają do $\lambda = 1$ (pełny dowód później). Stąd nasz rozważany problem jest *normalny*. Możemy zatem udowodnić istnienie stałej K_q^1 takiej, że:

$$|q(t)| \leq K_q^1 |p(t)| \quad (5.3)$$

dla prawie każdego $t \in [0, T]$.

Zatem wyciągnijmy wnioski z podpunktów (i)-(v) dla $\lambda = 1$, które później wykorzystamy do walidacji naszego rozwiązania numerycznego. Równania w (ii) dla zmiennej $p = (p_S, p_E, p_I, p_N)$ są w szczególności dane przez:

$$-p'_S(t) = -(d + cI_*(t) + u_*(t))p_S(t) + cI_*(t)p_E(t) - u_*(t)q(t), \quad (5.4)$$

$$-p'_E(t) = -(e + d)p_E(t) + ep_I(t), \quad (5.5)$$

$$-p'_I(t) = -cS_*(t)p_S(t) + cS_*(t)p_E(t) - (g + a + d)p_I(t) - ap_N(t) - A, \quad (5.6)$$

$$-p'_N(t) = bp_S(t) + (b - d)p_N(t). \quad (5.7)$$

Oceńmy zatem warunek maksymalności (iii) dla hamiltonianu H. Zdefiniujmy funkcję boolowską (czyli taką, że klik) ϕ jako:

$$\phi(x, p) = H_u(x, u, p) = -B - p_S S, \quad \phi(t) = \phi(x(t), p(t)) \quad (5.8)$$

i sprawdźmy czy warunek (iii) jest równoważny warunkowi o maksymalności:

$$\phi(t)u_*(t) = \max_u \{\phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1, uS_*(t) \leq V_0\}. \quad (5.9)$$

Co daje prawo kontroli:

$$u_*(t) = \begin{cases} \min\{1, \frac{V_0}{S_*(t)}\} & , \text{ gdy } \phi(t) > 0 \\ 0 & , \text{ gdy } \phi(t) < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Każde pojedyncze 0 funkcji $\phi(t)$ powoduje przełączenie sterowania z $\min\{1, \frac{V_0}{S_*(t)}\}$ do 0 lub odwrotnie. Jeśli jednak $\phi(t) = 0$ spełnia $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, mamy do czynienia z *pojedynczym sterowaniem*. Nie będziemy jednak wdawać się w szczegóły, gdyż jest to nieistotne dla głównego tematu naszej pracy (nie pojawią się w obliczeniach, jest to jedynie podane w ramach formalności rozwiązań). Co więcej możemy zauważyć, że $0 < u_*(t) < 1$ utrzymuje wartości wzdłuż łuku granicznego zagadnienia $uS \leq V_0$ tzn zawsze, gdy $u_*(t) = V_0/S_*(t)$.

W związku z tym definiujemy kontrolę poprzez:

$$u_*(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{S_*(t)} & , \text{ gdy } \phi(t) > 0 \\ 0 & , \text{ gdy } \phi(t) < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Z powodu tego, iż $0 < u_*(t) < 1$ mnożnik $\mu(t)$ w (iv) znika co daje zależność:

$$0 = \mu(t) = H_u[t] = -B - p_S(t)S_*(t) - q(t)S_*(t). \quad (5.12)$$

Pozwala to na obliczenie mnożnika $q(t)$, dla którego otrzymujemy w związku z warunkiem komplementarności (v):

$$q(t) = \begin{cases} \frac{-B}{S_*(t)} & , \text{ gdy } u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)}, \\ 0 & , \text{ gdy } u_*(t) < \frac{V_0}{S_*(t)}. \end{cases} \quad (5.13)$$

6 Obliczenia

W Tabeli przedstawiamy wartości warunków początkowych, parametrów i stałych, które zostały wykorzystane w naszych obliczeniach. Dla rozwiązania problemu bierzemy $T = 20$ dni. Wybieramy

Parameter	Description	Value
b	natural birth rate	0.525
d	natural death rate	0.5
c	incidence coefficient	0.001
e	exposed to infectious rate	0.5
g	recovery rate	0.1
a	disease induced death rate	0.2
A	weight parameter	5
B	weight parameter	10
T	number of years	20
S_0	initial susceptible population	1000
E_0	initial exposed population	100
I_0	initial infected population	50
R_0	initial recovered population	15
N_0	initial population	1165
W_0	initial vaccinated population	0

siatkę $N = 10000$ z

$$\Delta t = \frac{T}{n} = 0.002$$

i używamy schematu Eulera jako metody integracji. Dopuszczalna tolerancja konwergencji jest ustalona na $\epsilon_{real} = 10^{-9}$. Dla P_{mixed}

$$u(t)s(t) \leq V_0 = 125$$

i znajdujemy optymalną kontrolę:

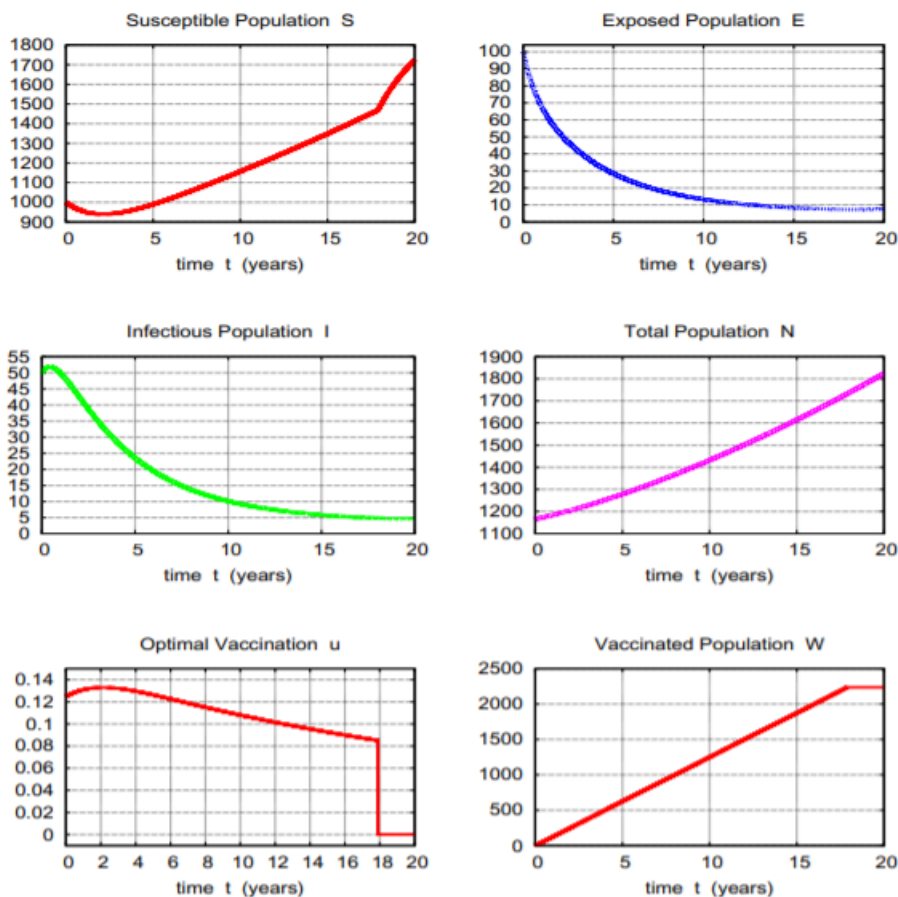
$$u_*(t) = \begin{cases} 125/S_*(t) & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{dla } t_1 < t \leq T = 20 \end{cases}$$

To pokazuje, że samo ograniczenie wyrażone jako nowa zmienna sterująca $v = uS$ jest *Regulatorem dwustawny* (definicję można znaleźć [tutaj](#)), z tylko jednym przełącznikiem w t_1 . Otrzymujemy wyniki liczbowe. Wyniki numeryczne dla $B = 10$.

$$\begin{aligned} J_1(x, u) &= 262.9807, \\ t_1 &= 3.589273, \\ S(T) &= 1849.624, \\ E(T) &= 3911697, \\ I(T) &= 2.272755, \\ N(T) &= 1858.109. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Liczbowe rezultaty dla $B = 2$, przy danych pobranych z liczbowych:

$$\begin{aligned} J_1(x, u) &= 207.5697 \\ t_1 &= 6.575 \\ S(T) &= 1849.261 \\ E(T) &= 1.128632 \\ I(T) &= 0.6565977 \\ N(T) &= 1862.710 \end{aligned} \tag{6.2}$$



Rysunek 6.1: Powyższe wykresy oraz wyniki zaczerpnięte z literatury: [link!](#)

7 Podsumowanie

Rozważaliśmy optymalny problem sterowania z mieszanymi ograniczeniami i kosztem L^1 dla modelu epidemicznego SEIR chorób zakaźnych u ludzi. W tej optymalnej kontroli problem kontrola pojawia się liniowo. Omówiliśmy niezbędne warunki. Zasada maksymalna i uzyskane wyraźne wzory na funkcję przełączania oraz mnożnik związany z mieszanym ograniczeniem pod względem stanu i zmienne sąsiadujące. Optymalny problem kontroli rozwiązuje się dzięki dyskretyzacji i metody programowania nieliniowego. Rozwiązanie numeryczne pokazuje, że samo ograniczenie, uważane za nową zmienną kontrolną $v = u(S)$, Nigdy nie mieliśmy do czynienia z pojedynczymi kontrolami. Ponieważ podejście numeryczne dostarcza również zmienne sąsiednie, moglibyśmy sprawdzić, czy obliczone rozwiązanie spełnia niezbędne warunki optymalności dokładnie. Badanie wystarczających warunków wykracza poza zakres tego artykułu. W przyszłej pracy zbadamy weryfikację numeryczną drugiego rzędu wystarczające warunki przy użyciu metod opisanych w. To także pozwala nam się uczyć analiza wrażliwości i obliczanie pochodnych czułości parametrycznej.